

DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.005

О численных алгоритмах решения прямой и обратной задач рассеяния системы Захарова – Шабата

С. Б. МЕДВЕДЕВ^{1,*}, И. А. ВАСЕВА^{1,2}, И. С. ЧЕХОВСКОЙ², М. П. ФЕДУРУК^{2,1}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Медведев Сергей Борисович, e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Поступила 11 апреля 2023 г., принята в печать 05 мая 2023 г.

Представлен обзор актуальных численных алгоритмов, применяющихся для решения нелинейного уравнения Шрёдингера с помощью метода обратной задачи рассеяния. Рассмотрены как методы для прямой задачи, позволяющие вычислить так называемый нелинейный спектр Фурье, так и методы, с помощью которых можно по нелинейному спектру восстановить решение при любом значении эволюционной переменной (обратная задача).

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, нелинейное уравнение Шрёдингера, задача Захарова – Шабата, уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко, нелинейное преобразование Фурье.

Цитирование: Медведев С.Б., Васева И.А., Чеховской И.С., Федорук М.П. О численных алгоритмах решения прямой и обратной задач рассеяния системы Захарова – Шабата. Вычислительные технологии. 2023; 28(3):60–83. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.005.

Введение

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) для нелинейного уравнения Шрёдингера позволяет проинтегрировать это уравнение [1–3]. Он состоит из прямой задачи Захарова – Шабата (ЗШ), в которой определяются данные рассеяния, и обратной, в которой по данным рассеяния строится решение с помощью уравнений Гельфанда – Левитана – Марченко (УГЛМ) или ряда других подходов. Метод обратной задачи рассеяния, также известный под названием “нелинейное преобразование Фурье” (nonlinear Fourier transform — NFT), в последнее время стал привлекать большое внимание в областях, где используется нелинейное уравнение Шрёдингера для описания различных типов оптических сигналов. В частности, он нашел применение в телекоммуникационных приложениях, в которых был использован новый способ для компенсации эффектов, воздействующих на сигнал во время его распространения в оптических линиях связи [4–9]. Метод используется также для описания и анализа различных физических явлений [10, 11]. Кроме того, задача о рассеянии на брэгговских решетках, которые являются основой для оптических фильтров в высокоскоростных оптоволоконных линиях передачи данных, сводится к системе ЗШ [12, 13]. Уравнение Шрёдингера для двухуровневых квантовых систем с переменным по времени гамильтонианом принимает форму системы уравнений ЗШ [14, 15].

Идея использовать солитоны для передачи данных в оптоволоконных линиях возникла впервые в работе [16]. Затем нелинейное уравнение Шрёдингера и его модификации были интенсивно изучены в связи с оптоволоконными телекоммуникационными системами [17–19]. Позже выдвинута идея использовать мультисолитонные импульсы в оптоволоконных линиях передачи данных, когда информация модулируется и восстанавливается в так называемом нелинейном пространстве Фурье [20, 21]. В связи с этим возрос интерес к численным методам для решения прямой и обратной задач. В настоящей работе представлен краткий обзор основных методов для численного решения таких задач.

1. Общие сведения

Метод обратной задачи рассеяния используется при решении задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Он основан на связи нелинейного уравнения с данными рассеяния семейства вспомогательных линейных дифференциальных операторов, дающей возможность по эволюции данных рассеяния восстановить эволюцию решения нелинейного уравнения. Метод обратной задачи рассеяния применим и для нелинейного уравнения Шрёдингера [1]:

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + |q|^2 q = 0. \tag{1}$$

Здесь знак σ соответственно обозначает аномальную ($\sigma = 1$) или нормальную ($\sigma = -1$) дисперсию. Уравнение (1) является условием совместности

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{M}, \hat{L}] = \hat{M}\hat{L} - \hat{L}\hat{M}$$

двух линейных уравнений

$$\hat{L}\Psi = \zeta\Psi, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \hat{M}\Psi,$$

где операторы \hat{L}, \hat{M} составляют так называемую пару Лакса и имеют вид

$$\hat{L} = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -q(z_0, t) \\ -\sigma q^*(z_0, t) & -\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix},$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} i \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{i}{2} |q(z_0, t)|^2 & q(z_0, t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial q(z_0, t)}{\partial t} \\ -q^*(z_0, t) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial q^*(z_0, t)}{\partial t} & i \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{i}{2} |q(z_0, t)|^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\zeta = \xi + i\eta$ — комплексное спектральное волновое число.

Общая схема МОЗР представлена на рис. 1. На первом этапе по начальным данным $q(z_0, t)$ решается прямая задача рассеяния и находятся данные рассеяния $\Sigma(z_0)$. Далее по элементарным формулам находится эволюция данных рассеяния. Наконец, на третьем этапе решается обратная задача рассеяния и, например, с помощью уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко находится решение $q(z, t)$.

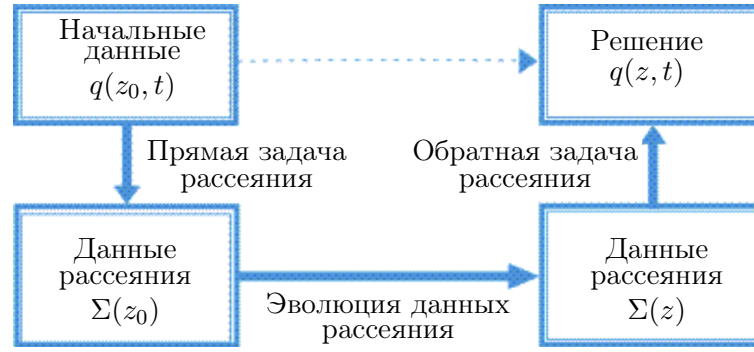


Рис. 1. Общая схема метода обратной задачи рассеяния
Fig. 1. General scheme of the inverse scattering transform

Прямая задача ЗШ состоит в решении задачи на собственные значения:

$$\hat{L}\Phi = \zeta\Phi, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\phi_1}{dt} = q(z_0, t)\phi_2 - i\zeta\phi_1, \quad \frac{d\phi_2}{dt} = -\sigma q^*(z_0, t)\phi_1 + i\zeta\phi_2. \quad (2)$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Q(\zeta, q)\Phi, \quad Q(\zeta, q) = \begin{pmatrix} -i\zeta & q(z_0, t) \\ -\sigma q^*(z_0, t) & i\zeta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Рассмотрим алгоритмы решения только при условии, что при $t \rightarrow \pm\infty$ решение $q(t) \rightarrow 0$. В этом случае имеются специальные решения для прямой задачи ЗШ — так называемые функции Йоста Φ и Ψ . Эти решения имеют простые асимптотики при $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \phi_1(t, \zeta) &= e^{-i\zeta t} + O(1), & \phi_2(t, \zeta) &= O(1), & t &\rightarrow -\infty, \\ \psi_1(t, \zeta) &= O(1), & \psi_2(t, \zeta) &= e^{i\zeta t} + O(1), & t &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Указанные функции решают прямую задачу ЗШ и являются линейно зависимыми

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &= a(\zeta) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} + b(\zeta) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} &= -\tilde{a}(\zeta) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \tilde{b}(\zeta) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь по определению

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^*(t, \zeta^*) \\ -\psi_1^*(t, \zeta^*) \end{pmatrix};$$

$a(\zeta)$, $b(\zeta)$ — функции рассеяния Йоста. Из граничных условий (4) вытекает, что

$$a(\zeta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t, \zeta)e^{i\zeta t}, \quad b(\zeta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t, \zeta)e^{-i\zeta t}. \quad (6)$$

Система ЗШ сохраняет квадратичный инвариант для действительного спектрального параметра ξ :

$$|\phi_1(t, \xi)|^2 + \sigma |\phi_2(t, \xi)|^2 \equiv 1,$$

из чего, в частности, следует

$$H(\xi) \equiv |a(\xi)|^2 + \sigma|b(\xi)|^2 \equiv 1. \quad (7)$$

Также сохраняется энергия непрерывного спектра:

$$E_c = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a(\xi)|^2 d\xi. \quad (8)$$

Подробные сведения о консервативных свойствах системы ЗШ можно найти в [22].

Левый и правый коэффициенты отражения даются соответственно выражениями

$$l(\xi) = \frac{b^*(\xi)}{a(\xi)}, \quad r(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

определяющими непрерывный спектр оператора \hat{L} . Вторую часть спектра составляет дискретный спектр с дискретными собственными значениями $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, которые есть собственные значения задачи ЗШ с положительной мнимой частью $\eta_n > 0$, а их связь с левой $l(\zeta)$ или правой $r(\zeta)$ нормировочными константами определяется выче-

тами в точках ζ_n : $l_n = \frac{1}{b(\zeta_n)a'(\zeta_n)}$, $r_n = \frac{b(\zeta_n)}{a'(\zeta_n)}$, где штрих обозначает производную по отношению к комплексному параметру ζ . Для односолитонного сигнала имеем четыре действительных параметра: амплитуду солитона $A = 2\eta_n$, солитонную частоту $\Omega = -2\xi_n$, положение солитона $T = -\frac{1}{2\eta_n} \log \frac{|r_n|}{2\eta_n}$, фазу солитона $\varphi = -\arg[ir_n]$.

Полный нелинейный спектр сигнала $q(z_0, t)$ выглядит следующим образом:

$$\Sigma_l = \{l(\xi), [\zeta_n, l_n]_{n=1}^N\}, \quad \Sigma_r = \{r(\xi), [\zeta_n, r_n]_{n=1}^N\}, \quad (9)$$

где N — общее число солитонов в сигнале. В случае нормальной дисперсии спектр не имеет дискретной части и для его характеристики достаточно знать $l(\xi)$ или $r(\xi)$. Собственные значения ζ_n не зависят от z . Для остальных величин имеем следующую зависимость от длины распространения z :

$$\begin{aligned} \zeta_n(z) &= \zeta_n(z - z_0), \\ l(\xi, z) &= l(\xi, z_0)e^{-2i\xi^2(z-z_0)}, \quad l_n(z) = l_n(z_0)e^{-2i\zeta_n^2(z-z_0)}, \\ r(\xi, z) &= r(\xi, z_0)e^{2i\xi^2(z-z_0)}, \quad r_n(z) = r_n(z_0)e^{2i\zeta_n^2(z-z_0)}. \end{aligned}$$

Цель прямого нелинейного фурье-преобразования — вычислить нелинейный спектр (9) по заданному пространственно-временному профилю сигнала $q(z, t)$ на заданном расстоянии z .

2. Численные методы для решения системы уравнений ЗШ

Перейдем к непосредственному описанию алгоритмов решения прямой задачи. Будем считать, что сигнал задан в точках дискретизации $m = 1, 2, \dots, M$ с шагом по времени τ : $q_m = q(z_0, T_1 + \tau(m - 1))$. Шаг по временной переменной определяется как $\tau = (T_2 - T_1)/(M - 1)$, где T_1, T_2 — соответственно левая и правая границы временного интервала. Заменим исходную систему (3) на интервале $(t_m - \tau/2, t_m + \tau/2)$ приближенной системой с постоянными коэффициентами

$$\Phi_{m+1/2} = T\Phi_{m-1/2}. \quad (10)$$

Таким образом, при счете слева с учетом граничных условий (4) и (6) получаем

$$\begin{pmatrix} \phi_1(T_2 - \tau/2, \zeta) \\ \phi_2(T_2 - \tau/2, \zeta) \end{pmatrix} \approx T(\zeta, q_M) \times \cdots \times T(\zeta, q_1) \begin{pmatrix} e^{-i\zeta(T_1 - \tau/2)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В итоге спектральные данные определяются как

$$a(\zeta) = \phi_1(T_2 - \tau/2, \zeta)e^{i\zeta(T_2 - \tau/2)}, \quad b(\zeta) = \phi_2(T_2 - \tau/2, \zeta)e^{-i\zeta(T_2 - \tau/2)}.$$

Матрицу перехода $T(\zeta, q_m)$ со слоя $m-1/2$ на слой $m+1/2$ можно находить различными численными методами.

Отметим, что матрицы перехода $T(\zeta, q_m)$ в (11) можно вычислить независимо, поэтому данный алгоритм легко распараллеливается для уменьшения компьютерного времени. Кроме того, можно распараллелить алгоритм перемножения этих матриц друг на друга.

Алгоритм Боффетты – Осборна, передаточный метод. Предполагается, что сигнал $q(z_0, t)$ есть кусочно-постоянная функция: $q_m = \text{const}$ на интервале $t \in [t_{m-1/2}, t_{m+1/2}]$. Тогда уравнение (3) можно проинтегрировать на этом интервале и получить матрицу перехода T в виде матричной экспоненты [23]

$$T^{(\text{BO})} = \exp[\tau Q(\zeta, q_m)] = \begin{pmatrix} \cosh(k\tau) - i\zeta \sinh(k\tau)/k & q_m \sinh(k\tau)/k \\ -\sigma q_m^* \sinh(k\tau)/k & \cosh(k\tau) + i\zeta \sinh(k\tau)/k \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $k^2 = -\sigma|q_m|^2 - \zeta^2$. Схема Боффетты – Осборна имеет второй порядок точности и является консервативной, т. е. сохраняет квадратичный инвариант (7) системы уравнений ЗШ для действительного спектрального параметра ξ .

Метод Абловица – Лэдика. Это еще один классический метод решения прямой задачи ЗШ, существует несколько его модификаций. Самым используемым является метод Абловица – Лэдика с нормализацией матрицы перехода [24]:

$$T^{(\text{AL})} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\tau^2|q_m|^2}} \begin{pmatrix} Z & \tau q_m \\ -\sigma\tau q_m^* & Z^{-1} \end{pmatrix}, \quad Z = \exp(-i\zeta\tau).$$

Как и алгоритм Боффетты – Осборна, метод имеет второй порядок точности по шагу дискретизации τ , однако он не сохраняет квадратичный инвариант (7) системы ЗШ.

Схема СТ4. В статье [25] предложено двухпараметрическое семейство одношаговых разностных схем четвертого порядка, которые используют значения $q(t)$ в трех соседних точках. В семействе содержится схема СТ4 (conservative transformed), сохраняющая квадратичный инвариант системы ЗШ для вещественного спектра. Матрица перехода схемы имеет вид

$$T^{(\text{CT4})} = e^{\frac{\tau}{2}Q_m} \left[I - \frac{\tau}{48}(R_{m+1} + R_{m-1}) \right]^{-1} \left[I + \frac{\tau}{48}(R_{m+1} + R_{m-1}) \right] e^{\frac{\tau}{2}Q_m}, \quad (13)$$

где

$$Q_m = Q(t_m), \quad R_{m+1} = e^{-\tau Q_m}(Q_{m+1} - Q_m)e^{\tau Q_m}, \quad R_{m-1} = e^{\tau Q_m}(Q_{m-1} - Q_m)e^{-\tau Q_m}.$$

Трехэкспоненциальная схема четвертого порядка точности TES4, построенная в [22], имеет вид

$$T^{(\text{TES4})} = \exp \left\{ \frac{\tau^2}{12} Q_m^{(1)} + \frac{\tau^3}{48} Q_m^{(2)} \right\} \exp \{ \tau Q_m \} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{12} Q_m^{(1)} + \frac{\tau^3}{48} Q_m^{(2)} \right\}. \quad (14)$$

Здесь $Q_m = Q(t_m)$ и $Q_m^{(k)}$, $k = 1, 2$, — k -е производные матрицы Q , аппроксимированные центральными конечными разностями второго порядка. Схема TES4 также является консервативной.

Схемы на основе разложения Магнуса и аппроксимации Паде. В работе [26] предложен подход к конструированию консервативных схем высокого порядка точности на основе разложения Магнуса:

$$T = e^{Z(t)}, \quad Z(t) = \tau Z_1(t) + \tau^3 Z_3(t) + \tau^5 Z_5(t),$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= Q, \quad Z_3 = \frac{1}{24}Q^{(2)} + \frac{1}{12}[Q^{(1)}, Q], \\ Z_5 &= \frac{1}{1920}Q^{(4)} + \frac{1}{480}[Q^{(3)}, Q] + \frac{1}{480}[Q^{(1)}, Q^{(2)}] + \frac{1}{720}[[Q^{(2)}, Q], Q] + \\ &\quad + \frac{1}{240}[[Q, Q^{(1)}], Q^{(1)}] + \frac{1}{720}[Q^3, Q^{(1)}] + \frac{1}{240}[QQ^{(1)}Q, Q]. \end{aligned}$$

Производные $Q^{(k)}$ выражаются на равномерной сетке с пятиточечным шаблоном.

Для матриц второго порядка экспоненту можно вычислить аналитически:

$$e^Z = \cosh(\lambda)\sigma_0 + \frac{\sinh(\lambda)}{\lambda}Z, \tag{15}$$

где $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$ — собственные значения матрицы Z ; z_1, z_2, z_3 — коэффициенты в разложении матрицы Z по матрицам Паули σ_k :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & -Z_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & -z_3 \end{bmatrix} = z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3, \quad z_k \in \mathbb{C}.$$

На основе этого подхода предложены экспоненциальные схемы четвертого ES4 и шестого ES6 порядков точности.

Матричную экспоненту (15) можно приблизить через рациональные аппроксимации. Для точного сохранения схемами квадратичных инвариантов в работе [26] предложено использовать аппроксимацию в виде обобщенного преобразования Кэли, что включает в себя схемы, основанные на диагональной аппроксимации Паде. Для получения схемы шестого порядка достаточно использовать аппроксимацию Паде третьей степени (ES6_PADE3), однако численные эксперименты показали, что аппроксимация четвертой степени (ES6_PADE4) дает бóльшую точность при вычислении непрерывного спектра.

Схемы на основе SFQM экспоненциальных интеграторов. Существует подход к решению прямой задачи ЗШ, основанный на классе бескоммутаторных квазимагнусовских (commutator-free quasi-Magnus — CFQM) экспоненциальных интеграторов [27]. Схемы, построенные при помощи этого подхода, состоят из произведения нескольких матричных экспонент. Отличительной особенностью метода является необходимость использования интерполяции для вычисления значений потенциала в заданном наборе иррациональных узлов. Численные эксперименты показывают, что для получения удовлетворительного результата необходимо использовать глобальную интерполяцию на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) [28].

Хорошо зарекомендовала себя схема $\text{CF}_2^{[4]}$, впервые предложенная в работе [29]. Матрица перехода для этой схемы имеет вид

$$T^{(\text{CF}_2^{[4]})} = \exp \left(\begin{bmatrix} -i\zeta/2 & r_k^{(1)} \\ -\sigma r_k^{(1)*} & i\zeta/2 \end{bmatrix} \tau \right) \exp \left(\begin{bmatrix} -i\zeta/2 & r_k^{(2)} \\ -\sigma r_k^{(2)*} & i\zeta/2 \end{bmatrix} \tau \right), \quad (16)$$

где $r_k^{(1)} = (q_k^{(1)} + q_k^{(2)})/4 + \sqrt{3}(q_k^{(2)} - q_k^{(1)})/6$, $r_k^{(2)} = (q_k^{(1)} + q_k^{(2)})/4 - \sqrt{3}(q_k^{(2)} - q_k^{(1)})/6$, $q_k^{(1)} = q(t_k - \tau\sqrt{3}/6)$, $q_k^{(2)} = q(t_k + \tau\sqrt{3}/6)$. Схема сохраняет квадратичный инвариант, но требует интерполяции на основе БПФ в иррациональных узлах.

В работах [27, 28] предложена схема шестого порядка точности $\text{CF}_4^{[6]}$. Здесь матрица перехода состоит из четырех экспонент с комплексными коэффициентами. По точности эта схема показала себя примерно как экспоненциальная схема ES6. По производительности она медленнее, чем ES6, так как требует вычисления четырех экспонент. Из-за наличия комплексных коэффициентов схема $\text{CF}_4^{[6]}$ не сохраняет квадратичный инвариант.

Особенности вычисления дискретного спектра. Для вычисления нормировочных констант l_n , соответствующих дискретным собственным значениям ζ_n системы ЗШ, необходимо найти производные

$$\frac{da}{d\zeta} = \frac{d\phi_1}{d\zeta} e^{i\zeta(T_2 - \tau/2)} + i(T_2 - \tau/2)a(\zeta).$$

Из (10) получаем

$$\frac{d}{d\zeta} \Phi_{m+1/2} = T'_\zeta \Phi_{m-1/2} + T \frac{d}{d\zeta} \Phi_{m-1/2},$$

где начальное значение определяется из (4):

$$\frac{d}{d\zeta} \Phi(T_1 - \tau/2, \zeta) = \begin{pmatrix} -i(T_1 - \tau/2)\phi_1(T_1 - \tau/2, \zeta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Формулы для определения производной T'_ζ для разных схем можно найти в работе [24].

Необходимо отметить, что при вычислении нормировочных констант для собственных значений, мнимая часть которых больше единицы, возникают проблемы с устойчивостью. В таких случаях используется двухсторонний метод, основанный на решении системы ЗШ с левых и правых начальных данных [21].

3. Быстрые методы

На идее предварительного “быстрого” перемножения коэффициентов матрицы полиномов для непрерывного спектра $T(\xi) = T(\xi, q_M)T(\xi, q_{M-1}) \dots T(\xi, q_1)$ основаны так называемые быстрые алгоритмы, которые могут быть вычислены за $O(M \log_2^2 M)$ арифметических операций [30, 31]. Метод быстрого вычисления произведения матриц основан на технике “разделяй и властвуй” и быстром умножении многочленов [30–32]. Вместо умножения вектора $\Phi_{m-1/2}$ на матрицу перехода $T_m = T(\xi, q_m)$ для каждого временного шага сначала перемножаются все полиномиальные матрицы перехода, что дает полную матрицу перехода T как многочлен от ξ .

Итак, пусть число перемножаемых матриц равно степени двойки: $M = 2^k$. Первый шаг состоит в том, чтобы сгруппировать и умножить $M/2$ матриц вида

$$T_{2,1} = T_2 T_1, \quad T_{4,3} = T_4 T_3, \dots, T_{M,M-1} = T_M T_{M-1}.$$

На втором шаге перемножаем $M/4$ матриц вида

$$T_{4,3,2,1} = T_{4,3}T_{2,1}, \quad T_{8,7,6,5} = T_{8,7}T_{6,5}, \dots, T_{M,M-1,M-2,M-3} = T_{M,M-1}T_{M-2,M-3}.$$

Аналогичным образом алгоритм продолжается до тех пор, пока не будет вычислена матрица T . В результате каждого шага порядок перемножаемых многочленов растет, а их количество уменьшается вдвое. Каждое матричное умножение требует только полиномиального умножения. Произведение многочленов требует операции свертки, которая осуществляется с помощью быстрого преобразования Фурье. Поскольку БПФ требует $O(M \log_2 M)$ операций, оказывается, что прямая задача рассеяния в отсутствие дискретного спектра имеет временную сложность асимптотически всего в $O(\log_2 M)$ раз больше, чем линейная. Следует отметить, что если T_m не полиномиальная матрица, можно использовать преобразование координат $z = f(\xi)$ для получения матрицы перехода, которая является полиномом от z .

Быстрая схема на основе разложения Сузуки. В работе [33] к схеме TES4 (14) применяется так называемая факторизация Сузуки [34]

$$e^{\tau Q} = e^{\tau(A+B)} = e^{\frac{7}{48}\tau B} e^{\frac{1}{3}\tau A} e^{\frac{3}{8}\tau B} e^{-\frac{1}{3}\tau A} e^{-\frac{1}{48}\tau B} e^{\tau A} e^{-\frac{1}{48}\tau B} e^{-\frac{1}{3}\tau A} e^{\frac{3}{8}\tau B} e^{\frac{1}{3}\tau A} e^{\frac{7}{48}\tau B}, \quad (17)$$

где

$$Q = A + B, \quad A = \begin{pmatrix} -i\zeta & 0 \\ 0 & i\zeta \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\sigma q^* & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате возникает консервативная схема четвертого порядка TES4SB, состоящая из 13 матричных экспонент. Буква “B” в названии схемы означает, что крайние экспоненты произведения содержат матрицу B , не зависящую от спектрального параметра ζ . Аналогично можно записать схему TES4SA, но для нее степень полиномов, зависящих от ζ , будет выше, что нерационально.

Основным преимуществом быстрого варианта схемы (17) FTES4SB является то, что она остается консервативной.

Быстрые схемы на основе аппроксимации Паде. В работе [26] представлены быстрые варианты экспоненциальных схем шестого порядка, основанных на использовании аппроксимации Паде: FES6_PADE3 и FES6_PADE4. Быстрые схемы близки по точности вычисления спектральных данных к исходным схемам, однако они немного хуже сохраняют энергию непрерывного спектра.

Быстрые схемы на основе экспоненциальных интеграторов CFQM. Быстрая схема FCF₂^[4] в [28] получена на основе схемы четвертого порядка CF₂^[4]. В быстром варианте схема перестает сохранять квадратичный инвариант. В этой же работе представлена быстрая схема шестого порядка FCF_RE₂^[4], полученная из быстрой схемы FCF₂^[4] при помощи экстраполяции Ричардсона. Она также не является консервативной. Еще одна схема шестого порядка CF₄^[6] не может быть реализована в быстром варианте, поскольку содержит комплексные коэффициенты.

4. Численные методы для нахождения дискретного спектра

Для нахождения дискретного спектра необходимо найти нули ζ_k функции $a(\zeta)$ в верхней полуплоскости. Большинство существующих подходов можно разделить на три основные группы.

- Итерационные методы поиска корней комплексного уравнения $a(\zeta_k) = 0$ [24]:
 - метод Ньютона;
 - метод секущих;
 - метод Мюллера.
- Методы, использующие некоторое разбиение комплексной плоскости или движение по ней вдоль траекторий:
 - метод контурных интегралов [35, 36];
 - метод отслеживания фазовых скачков (РЛТ) [37];
 - адаптивный алгоритм на основе доверительных областей [38].
- Решение задачи на собственные значения некоторой матрицы:
 - метод, основанный на построении некоторого полинома и нахождении его корней через поиск собственных чисел соответствующей сопровождающей матрицы с помощью QR/QZ-разложения;
 - конечно-разностный метод [39];
 - схема Абловица – Лэдика для решения дискретной спектральной задачи [39];
 - метод фурье-коллокаций [39];
 - алгоритм, основанный на преобразовании Граффе – Лобачевского [32].

Существуют также гибридные методы: любая комбинация подходов, описанных выше. Например, решения, полученные методами поиска собственных значений, могут использоваться как начальные предположения для старта итерационных методов поиска. Далее подробнее рассмотрим некоторые представители указанных методов.

4.1. Метод контурных интегралов

Известно, что для аналитической функции $a(z)$, имеющей N нулей внутри замкнутого контура C , справедлива теорема Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^p \frac{a'(z)}{a(z)} dz = \sum_{i=1}^N z_i^p, \quad (18)$$

где z_i — нули функции $a(z)$ внутри контура C . Положив $p = 0$, можно найти количество нулей функции $a(z)$ внутри выбранного замкнутого контура. Обозначим $\sum_{i=1}^N z_i^p = s_p$ и рассмотрим полином степени N

$$P_N(z) = \prod_{k=1}^N (z - z_k) = z^N + \sigma_1 z^{N-1} + \sigma_2 z^{N-2} + \dots + \sigma_N,$$

коэффициенты, которого выражаются через тождества Ньютона

$$\sigma_k = -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i s_{k-i} + s_k \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-1} & \dots & s_1 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, коэффициенты Ньютона σ_k выражаются через корни полинома $P_N(z)$

$$\sigma_1 = - \sum z_i^p, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \sigma_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{N-1} z_N, \dots, \quad \sigma_N = (-1)^N z_1 \dots z_N.$$

Используя результаты теоремы Коши, найдем σ_k , с помощью которых составим полином $P_N(z)$. Корни этого полинома будут совпадать с нулями функции $a(z)$. Таким образом, мы перешли от поиска нулей функции $a(z)$ к нахождению корней полинома, что может быть сделано любым итерационным методом [24].

Однако у метода контурного интегрирования тоже есть свои ограничения. Если N достаточно большое, то интегралы (18) нужно вычислять с высокой точностью, чтобы нули $a(z)$ и $P_N(z)$ совпадали. Для решения этой проблемы предлагается разбивать область интегрирования на подобласти с небольшим количеством нулей: $N \leq 5$.

Стоит отметить, что для использования формулы контурного интегрирования (18) требуется знание производной функции $a(z)$, вычисление которой на практике может быть сопряжено с определенными трудностями. Поэтому можно использовать различные приближенные методы для вычисления этой величины.

4.2. Метод Фурье-коллокаций

Данный метод описан в работе [39]. Подставим в (2) разложение функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ в ряд Фурье:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=-M/2}^{k=M/2} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{1k} \\ \tilde{\phi}_{2k} \end{pmatrix} \cdot e^{ik\frac{2\pi}{T}}, \quad q(t) = \sum_{k=-M/2}^{k=M/2} \tilde{q}_k \cdot e^{ik\frac{2\pi}{T}},$$

где функции с тильдами представляют собой коэффициенты в разложении ряда Фурье. Тогда в фурье-пространстве система уравнений Захарова – Шабата записывается как

$$\begin{aligned} -\tilde{\phi}_{1k} \frac{2\pi k}{T} - i \sum_{m=-M/2}^{M/2} \tilde{q}_{k-m} \tilde{\phi}_{2m} &= \zeta \tilde{\phi}_{1k}, \\ \tilde{\phi}_{2k} \frac{2\pi k}{T} - i \sum_{m=-M/2}^{M/2} \tilde{q}_{k-m}^* \tilde{\phi}_{1m} &= \zeta \tilde{\phi}_{2k}. \end{aligned} \tag{19}$$

В матричной записи система (19) принимает вид

$$\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ -H_2^\dagger & -H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь H_2^\dagger — эрмитово-сопряженная матрица,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 &= \left(\tilde{\phi}_{1,-M/2}, \tilde{\phi}_{1,-M/2+1}, \dots, \tilde{\phi}_{1,M/2} \right), \quad \tilde{\phi}_2 = \left(\tilde{\phi}_{2,-M/2}, \tilde{\phi}_{2,-M/2+1}, \dots, \tilde{\phi}_{2,M/2} \right), \\ H_1 &= -\frac{2\pi}{T} \text{diag} \left(-\frac{M}{2}, -\frac{M}{2} + 1, \dots, \frac{M}{2} \right); \end{aligned}$$

H_2 — тридиагональная матрица размерности $(M+1) \times (M+1)$ с первой строкой

$$-i \left(\tilde{q}_0, \tilde{q}_{-1}, \tilde{q}_{-2}, \dots, \tilde{q}_{-M/2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M/2} \right)$$

и первым столбцом

$$-i \left(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{M/2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M/2} \right)^T.$$

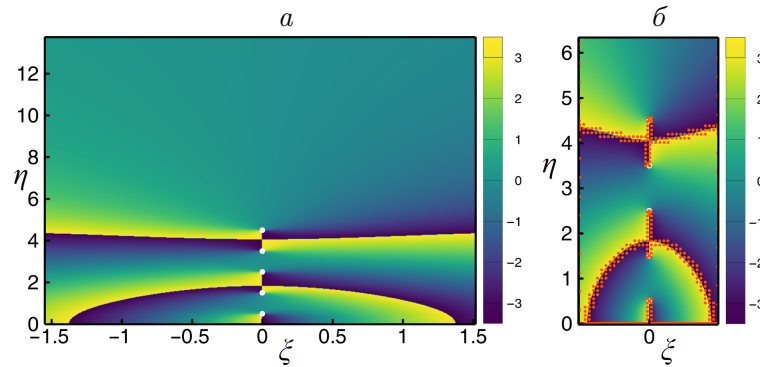


Рис. 2. Оверсолитон $q(t) = 5 \operatorname{sech}(t)$: a — область поиска дискретных собственных значений, $\arg a(\zeta)$ на ней и дискретный спектр исследуемого сигнала (белые точки); b — увеличенная центральная область, на которой изображена работа алгоритма (оранжевые точки)
 Fig. 2. Oversoliton $q(t) = 5 \operatorname{sech}(t)$: a — the domain for searching discrete eigenvalues, the argument $\arg a(\zeta)$ and the discrete spectrum of the signal (white circles); b — enlarged central area, which depicts the operation of the algorithm (orange dots)

4.3. Метод отслеживания скачка комплексного аргумента функции $a(\zeta)$

В работе [37] предложен новый метод поиска дискретных собственных значений для прямой задачи ЗШ, основанный на продвижении по комплексной плоскости вдоль специальных траекторий, ведущих к собственным значениям. В качестве таких траекторий предлагается использовать скачки аргумента функции $a(\zeta)$, для локализации которых не требуется большая точность. Этот метод менее подвержен вычислительным ошибкам. Для его работы не нужно вычислять непрерывный спектр, но если непрерывный спектр вычислен, то информация из него может быть использована для ускорения работы метода. Также он не требует априорного знания размера дискретного спектра. В случае правильного подбора параметров для настройки метода он позволяет найти все дискретные собственные значения с учетом их кратности быстрее матричных методов и метода контурных интегралов. Для решения прямой задачи ЗШ на этапе обхода траекторий использовался метод Абловица–Лэдика. Итерационное уточнение выполнялось методом Мюллера в сочетании со схемой ES4.

Кратко метод можно представить в виде последовательности шагов:

- 1) определение границы области, содержащей дискретный спектр;
- 2) локализация скачков аргумента коэффициента $a(\zeta)$ на границе области;
- 3) выбор шага для обхода траекторий скачка аргумента и уточнение точек скачка аргумента на границе области;
- 4) обход траекторий скачка аргумента;
- 5) уточнение найденных дискретных собственных значений с помощью итерационных методов.

Пример работы алгоритма представлен на рис. 2.

5. Примеры численных расчетов

Численные эксперименты проводились для модельного потенциала в виде чирпованного гиперболического секанса $q(t) = A[\operatorname{sech}(t)]^{1+iC}$ с параметрами $A = 5.2$, $C = 4$. Подробные аналитические выражения спектральных данных для такого потенциала приведены в [22].

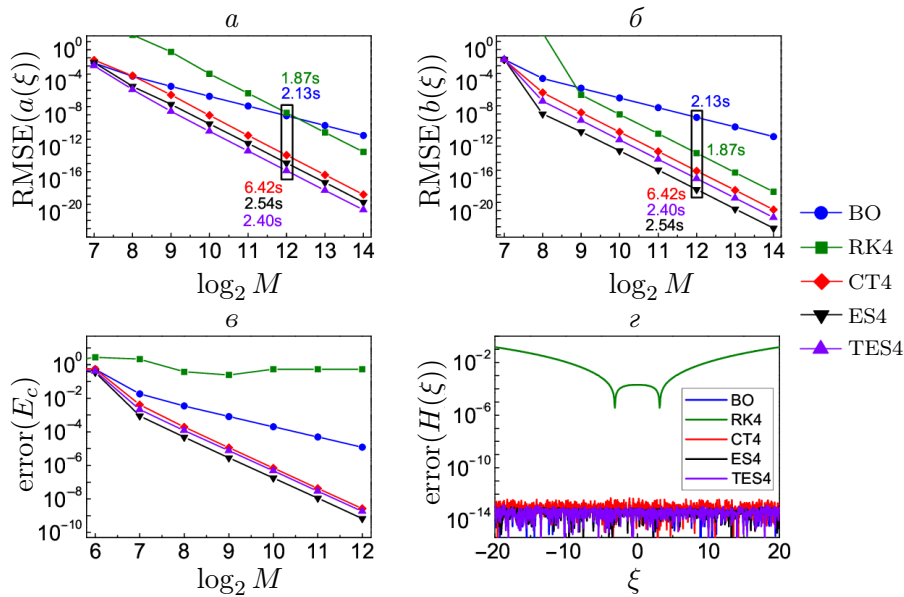


Рис. 3. Схемы второго и четвертого порядков; погрешность вычисления непрерывного спектра на примере аномальной дисперсии
 Fig. 3. Schemes of the second and fourth order; continuous spectrum errors in the case of anomalous dispersion

На рис. 3 представлены результаты сравнения классической схемы Боффетты – Осборна (12) второго порядка и схем четвертого порядка точности: неявной схемы Рунге – Кутты (RK4), схемы CT4 (13) и экспоненциальных схем TES4 (14) и ES4 [22]. В схеме RK4 необходимо знать промежуточные значения в половинных узлах сетки. Поскольку мы предполагаем, что исходный сигнал не является заданным по аналитическим формулам, считаем, что половина шага в схеме RK4 равна шагу сетки, на которой задан исходный сигнал $q(t)$.

На рис. 3 представлены среднеквадратичная погрешность вычисления коэффициентов рассеяния $a(\xi)$ и $b(\xi)$ и погрешность вычисления энергии непрерывного спектра E_c (8) в зависимости от числа точек M дискретизации потенциала, а также погрешность вычисления квадратичного инварианта $H(\xi)$. Рассмотрен случай аномальной дисперсии. Схема RK4 показала худшую точность среди схем четвертого порядка, кроме того, она не сохраняет квадратичный инвариант $H(\xi)$ (7) системы ЗШ. Самыми точными показали себя схемы TES4 и ES4, при этом TES4 работает быстрее. Схема CT4 также показала хорошую точность, однако она работает в 2.5 раза медленнее, чем ES4. В работе [40] схема CT4 сравнивалась со схемами, основанными на экспоненциальных интеграторах, а именно: интеграторах на основе классического (явного) метода Рунге – Кутты четвертого порядка, трехшагового метода Лобатто (three-stage Lobatto IIIA) (неявного) метода Рунге – Кутты, а также стандартного и бескоммутаторного метода Магнуса (CFQM). Кроме того, рассмотрен многошаговый неявный метод Адамса. По точности CT4 превосходит любой другой метод, рассмотренный в [40].

На рис. 4 и 5 представлены результаты сравнения быстрых и традиционных схем четвертого порядка точности. Здесь TES4 – трехэкспоненциальная схема (14); TES4SB – схема на основе TES4 и разложения Сузуки (17); FTES4SB – быстрый вариант схемы TES4SB; FTES4 – быстрый вариант схемы TES4, полученный на основе разложения экспоненты из статьи [41, см. формулу (20)]; результаты для схемы на основе экспоненциальных интеграторов $CF_2^{[4]}$ (16) и ее быстрого аналога $FCF_2^{[4]}$.

На рис. 4 приведена среднеквадратичная погрешность вычисления коэффициентов рассеяния $a(\xi)$ и $b(\xi)$, коэффициента отражения $r(\xi)$, а также погрешность вычисления энергии непрерывного спектра E_c (8) в зависимости от времени расчетов в случае аномальной дисперсии. Схема $CF_2^{[4]}$ демонстрирует наилучшую точность в этом примере и является самой эффективной среди традиционных схем. Быстрая схема FTES4SB показывает худшую эффективность по сравнению с другими быстрыми схемами. Это объясняется степенью многочлена, используемого для представления матрицы перехода (7 для FTES4SB, 4 для $FCF_2^{[4]}$ и 2 для FTES4). Однако рис. 5 подтверждает, что быстрые схемы $FCF_2^{[4]}$ и FTES4 не сохраняют квадратичный инвариант. Таким образом, быстрая схема FTES4SB, построенная при помощи разложения Сузуки, — наиболее эффективная среди консервативных схем.

На рис. 6 представлены результаты сравнения традиционных и быстрых схем шестого порядка точности. Это экспоненциальная схема на основе разложения Магнуса ES6, экспоненциальные схемы с использованием аппроксимации Паде ES6_PADE3

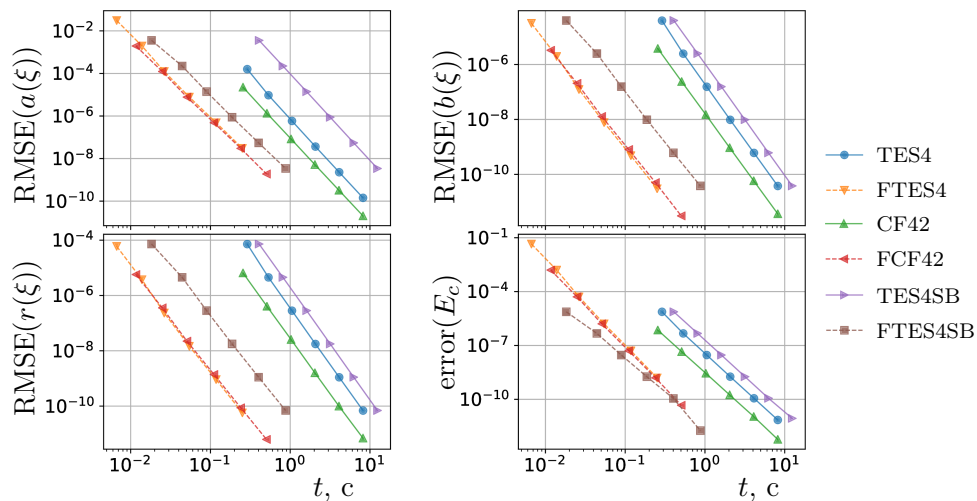


Рис. 4. Быстрые и традиционные схемы четвертого порядка. Погрешность вычисления непрерывного спектра в зависимости от времени расчетов на примере аномальной дисперсии
Fig. 4. Fast and conventional schemes of the fourth order. Continuous spectrum errors with respect to the runtime in the case of anomalous dispersion

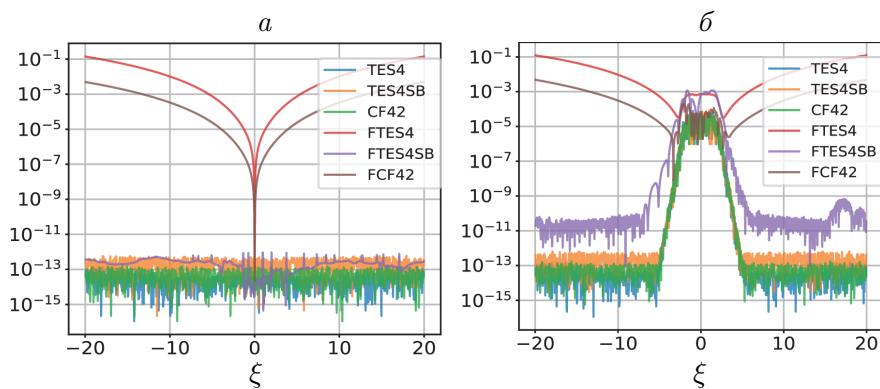


Рис. 5. Погрешность сохранения квадратичного инварианта $H(\xi)$ (7) в случае аномальной (а) и нормальной (б) дисперсии
Fig. 5. Quadratic invariant $H(\xi)$ (7) conservation error in the case of anomalous (a) and normal (b) dispersion

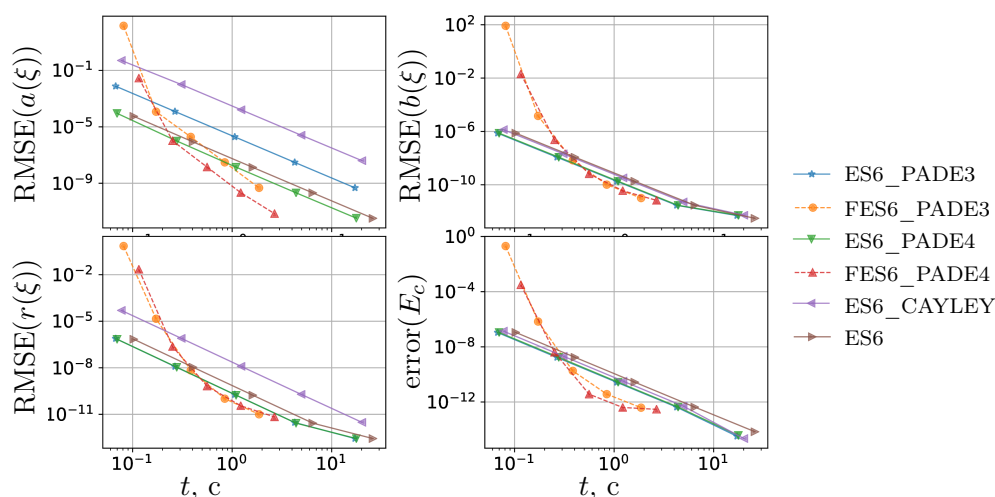


Рис. 6. Быстрые и традиционные схемы шестого порядка. Погрешность вычисления непрерывного спектра в зависимости от времени расчетов на примере нормальной дисперсии

Fig. 6. Comparison of fast and conventional schemes of the sixth order. Continuous spectrum errors with respect to the runtime in the case of normal dispersion

и ES6_PADE4, их быстрые аналоги FES6_PADE3 и FES6_PADE4, а также схема, построенная на основе обобщенного преобразования Кэли ES6_CAYLEY [26]. Все эти схемы сохраняют квадратичный инвариант для действительного спектрального параметра. На рис. 6 приведена среднеквадратичная погрешность вычисления коэффициентов рассеяния $a(\xi)$ и $b(\xi)$, коэффициента отражения $r(\xi)$, а также погрешность вычисления энергии непрерывного спектра E_c (8) в зависимости от времени расчетов. Рассмотрен случай нормальной дисперсии. Численные эксперименты показали, что схемы ES6 и ES6_PADE4 наиболее точны при вычислении непрерывного спектра. Схема ES6_PADE3 менее точна при вычислении коэффициента $a(\xi)$. Быстрые варианты схем близки по точности к традиционным. Среди традиционных самой эффективной является схема ES6_PADE4. Наихудший результат получен для схемы ES6_CAYLEY. Быстрые схемы превосходят по эффективности традиционные на большом количестве узлов, что объясняется их асимптотической сложностью.

6. Обратная задача

Известны несколько подходов к восстановлению сигнала по нелинейному спектру: решение задачи Римана – Гильберта [42, 43], методы, основанные на интегрировании системы уравнений Гельфанда – Левитана – Марченко: метод, основанный на переходе к системе уравнений в частных производных [44], метод тёплицева внутреннего окаймления ТИВ (Toeplitz inner bordering) [45–47] и его блочный вариант — обобщенный ТИВ (generalized ТИВ — GTIB) [48], алгоритм интегрального послойного восстановления [49, 50] и алгоритм параметризации ядер системы УГЛМ полиномами [51]. В [42] показано, что методы, основанные на численном решении УГЛМ, более точные в сравнении с методом, основанным на факторизации для задачи Римана – Гильберта.

В случае чисто непрерывного спектра для реализации обратного NFT можно использовать алгоритмы прямого NFT, обращенные во времени [42, 52], и тогда обратное нелинейное преобразование Фурье (NFT) можно рассматривать как двойник прямого NFT аналогично обычному преобразованию Фурье. Для чисто дискретного спек-

тра наиболее эффективно преобразование Дарбу [53]. Метод Дарбу также применяется в случае комбинации непрерывного и дискретного спектров [54], но при этом требуется решение УГЛМ для непрерывной части спектральных данных. Детальный обзор методов решения прямой и обратной задач НФТ можно найти, например, в [55].

Остановимся подробнее на обобщенном методе тёплицева внутреннего окаймления ГТІВ, который представляет собой обобщенную блочную версию метода ТІВ, являющегося одним из наиболее эффективных методов восстановления сигнала по нелинейному спектру при помощи решения УГЛМ. Как и метод ТІВ, ГТІВ имеет второй порядок аппроксимации и может восстанавливать сигналы, содержащие непрерывный и дискретный спектры. Метод ТІВ позволяет быстро находить решение УГЛМ на заданном интервале благодаря специально заданной треугольной области интегрирования. Такой подход имеет негативную сторону, а именно: необходимость стартовать с точки, в которой значения потенциала и матричных элементов малы. Обобщение метода, предложенное в [48], позволяет находить решение УГЛМ, стартуя с произвольной точки. При этом значения в следующих точках вычисляются через предыдущие, поэтому метод остается быстрым. В методе ГТІВ используются полная аппроксимация УГЛМ и замена переменных, которая приводит к линейной системе уравнений с полностью заполненными матрицами в виде тёплицевых блоков. Это является основным отличием метода ГТІВ от ТІВ, в котором используются треугольные тёплицевы матрицы, полученные благодаря предположению о конечности носителя ядра в интегралах.

Для восстановления потенциала $q(t)$ по заданным спектральным данным (9) необходимо решить обратную задачу для системы ЗШ (3). Эта задача может быть сведена к системе левых и правых УГЛМ [3]. Здесь приведем систему левых УГЛМ:

$$\begin{aligned} A_1^*(t, s) + \int_{-\infty}^t A_2(t, t') \Omega_l(t' + s) dt' &= 0, \quad t \geq s, \\ \mp A_2^*(t, s) + \Omega_l(t + s) + \int_{-\infty}^t A_1(t, t') \Omega_l(t' + s) dt' &= 0, \end{aligned}$$

где ядро определяется для действительных t следующим образом:

$$\Omega_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} l(\xi) e^{-i\xi t} d\xi - i \sum_{n=1}^N l_n e^{-i\zeta_n t}. \quad (20)$$

Потенциал $q(t)$ восстанавливается по формуле $q(t) = -2A_2^*(t, t)$.

6.1. Особенности восстановления потенциала по дискретному спектру

Для дискретного спектра, т. е. при наличии солитонов, характерно возникновение неустойчивости при численном решении УГЛМ. Это связано с наличием экспоненциально больших и малых элементов ядра (20), из-за чего матрицы системы становятся плохо обусловленными. При решении только левых или только правых УГЛМ возможны проблемы при восстановлении даже односолитонного сигнала. Эту проблему можно решить, используя комбинацию счета слева и справа, т. е. решая левые УГЛМ для левой части сигнала и правые УГЛМ для правой. Однако этот метод не работает для разнесенных во временной области солитонных решений. На рис. 7, *a* видно, что простая комбинация счета слева и справа не позволяет восстановить среднюю часть последовательности из восьми солитонов. Для того чтобы решить эту проблему, в работе [48]

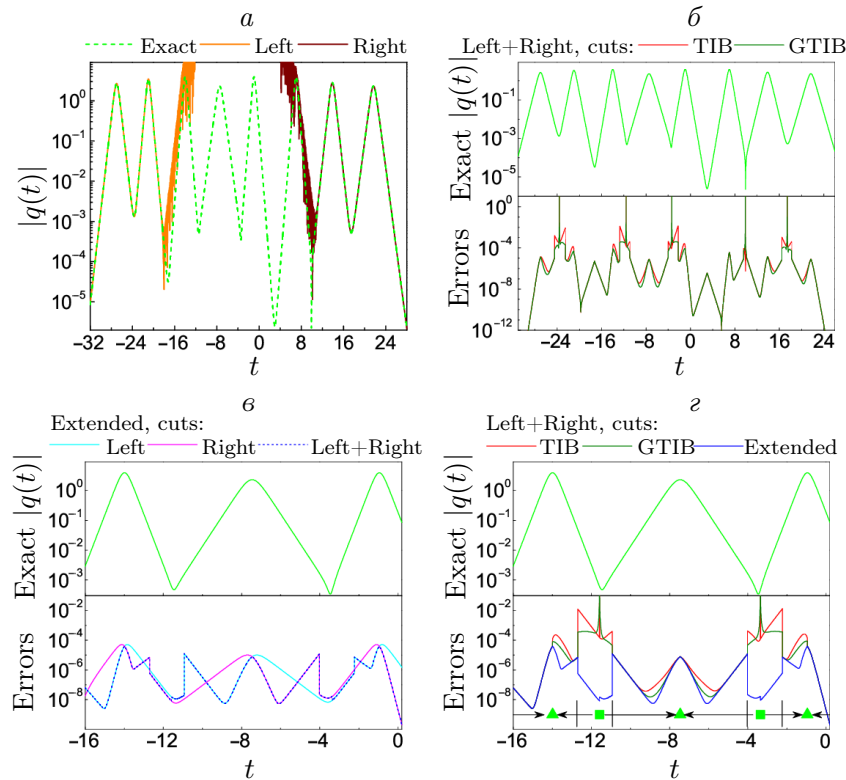


Рис. 7. Пример восстановления восьмисолитонного потенциала
 Fig. 7. An example of recovering eight-soliton potential

предлагается отрезать матричные элементы, достигнувшие границы зоны устойчивости солитона. По известным спектральным данным можно определять центры солитонов и зоны их устойчивости. В каждой зоне устойчивости можно восстанавливать потенциал комбинацией левых и правых УГЛМ, учитывая только устойчивые солитоны, а остальные отрезать. Вычисления начинаются в точке между соседними солитонами и направляются вправо и влево к их центрам. Эта схема и места разрезов показаны на увеличенном фрагменте графика на рис. 7, г. При достижении точки разреза алгоритм останавливается и запускается дальше с отрезанным матричным элементом. Процедура отрезания солитона заключается в следующем: зануляется его нормировочная константа, при этом нормировочные константы оставшихся солитонов меняются, потому что они должны соответствовать новому сигналу, в котором стало на один солитон меньше. Для переопределения нормировочных констант используется формула соответствия между левыми и правыми нормировочными константами для чисто дискретного спектра [48]:

$$l_n r_n = -\frac{1}{a'(\zeta_n)^2}, \quad a'(\zeta_n) = \frac{1}{\zeta_n - \zeta_n^*} \left[\prod_{k=1, k \neq n}^N \frac{\zeta_n - \zeta_k}{\zeta_n - \zeta_k^*} \right].$$

Особенностью метода ТИВ, а также ГТИВ является специально заданная треугольная область интегрирования. При этом на начальные точки сигнала приходится мало шагов интегрирования, что катастрофически сказывается на точности вычислений, если возникает необходимость стартовать с точки, в которой значения потенциала и матричных элементов велики. Пример такой ситуации представлен на рис. 7, б, где видны скачки погрешности в точках разрезов. Для решения этой проблемы в [48] предлагает-

ся расширять область интегрирования. Результаты расчетов с расширенной областью интегрирования представлены на рис. 7, в, г с пометкой Extended.

Алгоритм восстановления сигнала можно существенно упростить, если использовать для расчетов только левые (или только правые) УГЛМ, двигаясь все время в одну сторону от разреза к разрезу. Результаты такого подхода представлены на рис. 7, в голубым и розовым цветом. В среднем уровень погрешности получается такой же, как при использовании комбинации левых и правых УГЛМ.

Нужно отметить, что, если в длинной последовательности солитоны расположены слишком близко, становится невозможным определить их центры и отделить их друг от друга. Описанный алгоритм можно применять и в методе ТІВ, и в GTІВ. Численные эксперименты показали, что для того чтобы получить одинаковую точность, область интегрирования для ТІВ необходимо увеличивать сильнее. Но, несмотря на это, ТІВ остается более быстрым, чем GTІВ.

Проблема экспоненциальных зависимостей, характерных для дискретного спектра в задаче ЗШ, может возникнуть не только при решении УГЛМ, где появляются плохо обусловленные матрицы. Например, в методе Дарбу [53] для восстановления солитонного сигнала необходимо вычислить ядро системы ЗШ. Если солитоны в сигнале расположены далеко друг от друга, для вычисления ядра приходится умножать очень большую (малую) нормировочную константу на очень большую (малую) экспоненту. В результате возможен выход за пределы диапазона компьютерных чисел.

6.2. Особенности восстановления потенциала по непрерывному спектру

На рис. 8 представлено сравнение методов ТІВ и GTІВ на примере чисто непрерывного спектра в случае аномальной дисперсии. Расчеты проводились для потенциала в виде чирпованного гиперболического секанса $q(t) = A[\operatorname{sech}(t)]^{1+iC}$ с параметрами $A = 0.4$, $C = 4$. Такой сигнал имеет только непрерывный спектр. В этом случае в ядре отсутствуют экспоненциальные зависимости, возникающие при наличии солитонов. Потенциал восстанавливался при помощи решения левых УГЛМ, при этом счет начинался с разных стартовых точек t_0 . Если t_0 находится достаточно далеко от максимума потенциала, методы ТІВ и GTІВ дают одинаковую погрешность, при этом ТІВ работает быстрее благодаря тому, что в систему, аппроксимирующую УГЛМ, входят треугольные матрицы. Но если стартовая точка t_0 находится близко к максимуму потенциала, при счете слева метод ТІВ значительно хуже вычисляет его правую часть.

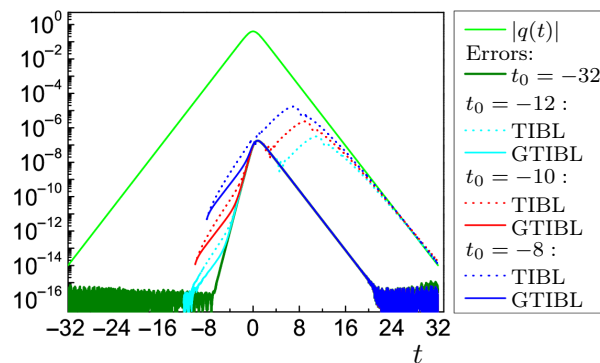


Рис. 8. Сравнение методов ТІВЛ и GTІВЛ (счет слева) на примере непрерывного спектра с разными стартовыми точками t_0

Fig. 8. Comparison of TIBL and GTIBL errors (solving the left GLME) for a continuous spectrum with different starting points t_0

Благодарности. Исследование методов для прямой и обратной задач выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 22-11-00287, <https://rscf.ru/project/22-11-00287>). Исследование быстрых вариантов алгоритмов и поиск дискретного спектра выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 20-11-20040, <https://rscf.ru/project/20-11-20040>).

Список литературы

- [1] **Shabat A., Zakharov V.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP*. 1972; 34(1):62.
- [2] **Ablowitz M.J., Segur H.** *Solitons and the inverse scattering transform*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia; 1981: 438. Available at: https://www2.umbc.edu/photonics/Menyuk/Zweck/Ablowitz-Segur_1981.pdf.
- [3] **Lamb G.L.** *Elements of soliton theory*. Wiley; 1980: 289.
- [4] **Yousefi M.I., Kschischang F.R.** Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part III: spectrum modulation. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2014; 60(7):4346–4369.
- [5] **Le S.T., Prilepsky J.E., Turitsyn S.K.** Nonlinear inverse synthesis for high spectral efficiency transmission in optical fibers. *Optics Express*. 2014; 22(22):26720–26741.
- [6] **Gui T., Lu C., Lau A.P.T., Wai P.K.A.** High-order modulation on a single discrete eigenvalue for optical communications based on nonlinear Fourier transform. *Optics Express*. 2017; 25(17):20286–20297.
- [7] **Wahls S.** Generation of time-limited signals in the nonlinear Fourier domain via b-modulation. *European Conference on Optical Communication (ECOC)*. IEEE; 2017; 9(6):1–3.
- [8] **Gui T., Zhou G., Lu C., Tao Lau A.P., Wahls S.** Nonlinear frequency division multiplexing with b-modulation: shifting the energy barrier. *Optics Express*. 2018; 26(21):27978.
- [9] **Civelli S., Turitsyn S.K., Secondini M., Prilepsky Ja.E.** Polarization multiplexed nonlinear inverse synthesis with standard and reduced-complexity NFT processing. *Optics Express*. 2018; 26(13):17360.
- [10] **Gelash A., Agafontsev D., Zakharov V., El G., Randoux S., Suret P.** Bound state soliton gas dynamics underlying the spontaneous modulational instability. *Physical Review Letters*. 2019; 123(23):234102.
- [11] **Mullyadzhyanov R., Gelash A.** Direct scattering transform of large wave packets. *Optics Letters*. 2019; 44(21):5298.
- [12] **Kashyap R.** *Fibre bragg gratings*. Academic Press; 1999: 458.
- [13] **Podivilov E.V., Shapiro D.A., Trubitsyn D.A.** Exactly solvable profiles of quasi-rectangular bragg filter with dispersion compensation. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2006; 8(9):788.
- [14] **Akulin V.** *Coherent dynamics of complex quantum systems*. Springer Science & Business Media; 2005: 472.
- [15] **Carmel L., Mann A.** Geometrical approach to two-level hamiltonians. *Physical Review A*. 2000; 61(5):052113.
- [16] **Hasegawa A., Tappert F.** Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*. 1973; 23(3):142–144.

- [17] **Hasegawa A., Matsumoto M.** Optical solitons in fibers. Springer; 2003: 41–59.
- [18] **Mollenauer L.F., Gordon J.P.** Solitons in optical fibers: fundamentals and applications. Elsevier; 2006: 296.
- [19] **Turitsyn S.K., Shapiro E.G., Medvedev S.B., Fedoruk M.P., Mezentsev V.K.** Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons. *Comptes Rendus Physique*. 2003; 4(1):145–161.
- [20] **Hasegawa A., Nyu T.** Eigenvalue communication. *Journal of Lightwave Technology*. 1993; 11(3):395–399.
- [21] **Hari S., Yousefi M.I., Kschischang F.R.** Multieigenvalue communication. *Journal of Lightwave Technology*. 2016; 34(13):3110–3117.
- [22] **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** Exponential fourth order schemes for direct Zakharov–Shabat problem. *Optics Express*. 2020; 28(1):20.
- [23] **Boffetta G., Richard A.** Osborne computation of the direct scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*. 1992; 102(2):252–264.
- [24] **Vasylchenkova A., Prilepsky J.E., Shepelsky D., Chattopadhyay A.** Direct nonlinear Fourier transform algorithms for the computation of solitonic spectra in focusing nonlinear Schrödinger equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019; (68):347–371.
- [25] **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** Numerical algorithm with fourth-order accuracy for the direct Zakharov–Shabat problem. *Optics Letters*. 2019; 44(9):2264.
- [26] **Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M.** Fast sixth-order algorithm based on the generalized Cayley transform for the Zakharov–Shabat system associated with nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*. 2022; (448):110764.
- [27] **Blanes S., Casas F., Thalhammer M.** High-order commutatorfree quasi-Magnus exponential integrators for non-autonomous linear evolution equations. *Computer Physics Communications*. 2017; (220):243–262.
- [28] **Chimmalgi S., Prins P.J., Wahls S.** Fast nonlinear Fourier transform algorithms using higher order exponential integrators. *IEEE Access*. 2019; (7):145161–145176.
- [29] **Chimmalgi S., Prins P.J., Wahls S.** Fast nonlinear Fourier transform algorithms using higher order exponential integrators. *arXiv Preprint*. 2018; arXiv:1812.00703.
- [30] **Wahls S., Vincent Poor H.** Fast numerical nonlinear Fourier transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2015; 61(12):6957–6974.
- [31] **Vaibhav V.** Fast inverse nonlinear Fourier transformation using exponential one-step methods: Darboux transformation. *Physical Review E*. 2017; 96(6):063302.
- [32] **Делицын А.Л.** Быстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений Захарова–Шабата и их приложения. *Математические заметки*. 2022; 112(2):199–214. DOI:10.1134/S0001434622070240.
- [33] **Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M.** Conservative multiexponential scheme for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem. *Optics Letters*. 2020; 45(7):2082–2085.
- [34] **Suzuki M.** General nonsymmetric higher-order decomposition of exponential operators and symplectic integrators. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1992; 61(9):3015–3019.
- [35] **Delves L.M., Lyness J.N.** A numerical method for locating the zeros of an analytic function. *Mathematics of Computation*. 1967; 21(100):543–543.

- [36] **Vasylichenkova A., Prilepsy Ja.E., Turitsyn S.K.** Contour integrals for numerical computation of discrete eigenvalues in the Zakharov–Shabat problem. *Optics Letters*. 2018; 43(15):3690.
- [37] **Chekhovskoy I.S., Medvedev S.B., Vaseva I.A., Sedov E.V., Fedoruk M.P.** Introducing phase jump tracking — a fast method for eigenvalue evaluation of the direct Zakharov–Shabat problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021; (96):105718.
- [38] **He J., Jianping L., Qin Y., Lin N., Yu X., He Y., Xu O., Peng D., Xiang M., Zhou G., Fu S.** Adaptive trust-region-based algorithm for the discrete eigenvalue evaluation of the direct nonlinear Fourier transform. *Optics Letters*. 2022; 47(16):4195–4198.
- [39] **Yousefi M.I., Kschischang F.R.** Information transmission using the nonlinear Fourier transform. Part II: numerical methods. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2014; 60(7):4329–4345.
- [40] **Vaibhav V.** Efficient nonlinear Fourier transform algorithms of order four on equispaced grid. *IEEE Photonics Technology Letters*. 2019; 31(15):1269–1272.
- [41] **Prins P.J., Wahls S.** Higher order exponential splittings for the fast nonLinear Fourier transform of the Korteweg–De Vries equation. *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — Proceedings*. 2018; (4):4524–4528.
- [42] **Wahls S., Vaibhav V.** Fast inverse nonlinear Fourier transforms for continuous spectra of Zakharov–Shabat type. *arXiv Preprint*. 2016; arXiv:1607.01305.
- [43] **Kamalian-Kopae M., Vasylichenkova A., Shepelsky D., Prilepsy Ja.E., Turitsyn S.K.** Full-spectrum periodic nonlinear Fourier transform optical communication through solving the Riemann–Hilbert problem. *Journal of Lightwave Technology*. 2020; 38(14):3602–3615.
- [44] **Xiao G., Yashiro K.** An efficient algorithm for solving Zakharov–Shabat inverse scattering problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2002; 50(6):807–811.
- [45] **Belai O.V., Podivilov E.V., Schwarz O.Ya., Shapiro D.A., Frumin L.L.** Finite bragg grating synthesis by numerical solution of hermitian Gel’fand–Levitan–Marchenko equations. *JOSA B*. 2006; 23(10):2040–2045.
- [46] **Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method of the fiber bragg grating synthesis. *JOSA B*. 2007; 24(7):1451–1457.
- [47] **Frumin L.L., Belai O.V., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem. *JOSA B*. 2015; 32(2):290–296.
- [48] **Medvedev S., Vaseva I., Fedoruk M.** Block Toeplitz inner-bordering method for the Gelfand–Levitan–Marchenko equations associated with the Zakharov–Shabat system. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2023; 31(2):191–202.
- [49] **Feced R., Zervas M.N., Muriel M.A.** An efficient inverse scattering algorithm for the design of nonuniform fiber bragg gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 1999; 35(8):1105–1115.
- [50] **Rosenthal A., Horowitz M.** Inverse scattering algorithm for reconstructing strongly reflecting fiber bragg gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2003; (39):1018–1026.
- [51] **Ahmad F., Razzaghi M.** A numerical solution to the Gel’fand–Levitan–Marchenko equation. *Applied Mathematics and Computation*. 1998; 89(1–3):31–39.
- [52] **Yousefi M., Yangzhang X.** Linear and nonlinear frequency-division multiplexing. *IEEE Transaction on Information Theory*. 2020; 66(1):478–495.

- [53] **Aref V.** Control and detection of discrete spectral amplitudes in nonlinear Fourier spectrum. arXiv Preprint. 2016; arXiv:1605.06328.
- [54] **Aref V., Le S.T., Buelow H.** Modulation over nonlinear Fourier spectrum: continuous and discrete spectrum. *Journal of Lightwave Technology*. 2018; 36(6):1289–1295.
- [55] **Turitsyn S.K., Prilepsky Ja.E., Le S.T., Wahls S., Frumin L.L., Kamalian M., Derevyanko S.A.** Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives. *Optica*. 2017; 4(3):307–322.

Вычислительные технологии, 2023, том 28, № 3, с. 60–83. © ФИЦ ИВТ, 2023
Computational Technologies, 2023, vol. 28, no. 3, pp. 60–83. © FRC ICT, 2023

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.005

On numerical algorithms for solving the direct and inverse scattering problems of the Zakharov – Shabat system

MEDVEDEV SERGEY B.^{1,*}, VASEVA IRINA A.^{1,2}, CHEKHOVSKOY IGOR S.²,
FEDORUK MIKHAIL P.^{2,1}

¹Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Medvedev Sergey B., e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Received April 11, 2023, accepted May 05, 2023.

Abstract

The paper presents an overview of the current numerical algorithms for implementing the inverse scattering transform (IST). The IST attracted special attention since it was proposed to use solitons as a bit of information for data transmission. Solitons are capable to compensate for nonlinear signal distortions and go beyond the limitations of linear data transmission methods. Accurate and fast numerical methods are needed to correctly describe and analyze the structure of complex multisoliton signals. Solitons are special solutions to the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), which describes the propagation of pulses in an optical fiber. The IST allows one to integrate the NLSE.

The paper considers methods for the direct Zakharov – Shabat (ZS) problem, which is a part of the IST. It allows calculating the nonlinear Fourier spectrum for a given potential. In particular, the paper presents the fast methods, needed for solving the problem for a large number of values of the spectral parameter. Special attention is given to the conservation property of the quadratic invariant of the ZS system. Since the integration takes place over a large area, the conservation of the quadratic invariant in computational algorithms must be exact. The paper also considers methods to restore the NLSE solution from a known nonlinear spectrum (inverse problem). Computational problems arising for a soliton spectrum are described.

The methods described in the paper will be useful for more accurate and realistic calculations for the construction of telecommunication data transmission systems based on NLSE soliton solutions.

Keywords: inverse scattering transform, nonlinear Schrödinger equation, Zakharov – Shabat problem, Gelfand – Levitan – Marchenko equations, nonlinear Fourier transform.

Citation: Medvedev S.B., Vaseva I.A., Chekhovskoy I.S., Fedoruk M.P. On numerical algorithms for solving the direct and inverse scattering problems of the Zakharov – Shabat system. *Computational Technologies*. 2023; 28(3):60–83. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.005. (In Russ.)

Acknowledgements. The work of methods for direct and inverse problems is supported by the Russian Science Foundation (grant No. 22-11-00287, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00287>). The work of fast variants of algorithms and discrete spectrum search is supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-11-20040, <https://rscf.ru/project/20-11-20040>).

References

1. **Shabat A., Zakharov V.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP*. 1972; 34(1):62.
2. **Ablowitz M.J., Segur H.** Solitons and the inverse scattering transform. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia; 1981: 438. Available at: https://www2.umbc.edu/photronics/Menyuk/Zweck/Ablowitz-Segur_1981.pdf.
3. **Lamb G.L.** Elements of soliton theory. Wiley; 1980: 289.
4. **Yousefi M.I., Kschischang F.R.** Information transmission using the nonlinear Fourier transform, Part III: spectrum modulation. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2014; 60(7):4346–4369.
5. **Le S.T., Prilepsky J.E., Turitsyn S.K.** Nonlinear inverse synthesis for high spectral efficiency transmission in optical fibers. *Optics Express*. 2014; 22(22):26720–26741.
6. **Gui T., Lu C., Lau A.P.T., Wai P.K.A.** High-order modulation on a single discrete eigenvalue for optical communications based on nonlinear Fourier transform. *Optics Express*. 2017; 25(17):20286–20297.
7. **Wahls S.** Generation of time-limited signals in the nonlinear Fourier domain via b-modulation. *European Conference on Optical Communication (ECOC)*. IEEE; 2017; 9(6):1–3.
8. **Gui T., Zhou G., Lu C., Tao Lau A.P., Wahls S.** Nonlinear frequency division multiplexing with b-modulation: shifting the energy barrier. *Optics Express*. 2018; 26(21):27978.
9. **Civelli S., Turitsyn S.K., Secondini M., Prilepsky Ja.E.** Polarization multiplexed nonlinear inverse synthesis with standard and reduced-complexity NFT processing. *Optics Express*. 2018; 26(13):17360.
10. **Gelash A., Agafontsev D., Zakharov V., El G., Randoux S., Suret P.** Bound state soliton gas dynamics underlying the spontaneous modulational instability. *Physical Review Letters*. 2019; 123(23):234102. DOI:10.1103/PhysRevLett.123.234102.
11. **Mullyadzhanov R., Gelash A.** Direct scattering transform of large wave packets. *Optics Letters*. 2019; 44(21):5298.
12. **Kashyap R.** Fibre bragg gratings. Academic Press; 1999: 458.
13. **Podivilov E.V., Shapiro D.A., Trubitsyn D.A.** Exactly solvable profiles of quasi-rectangular bragg filter with dispersion compensation. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2006; 8(9):788.
14. **Akulin V.** Coherent dynamics of complex quantum systems. Springer Science & Business Media; 2005: 472.
15. **Carmel L., Mann A.** Geometrical approach to two-level hamiltonians. *Physical Review A*. 2000; 61(5):052113.
16. **Hasegawa A., Tappert F.** Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*. 1973; 23(3):142–144.
17. **Hasegawa A., Matsumoto M.** Optical solitons in fibers. Springer; 2003: 41–59.
18. **Mollenauer L.F., Gordon J.P.** Solitons in optical fibers: fundamentals and applications. Elsevier; 2006: 296.
19. **Turitsyn S.K., Shapiro E.G., Medvedev S.B., Fedoruk M.P., Mezentsev V.K.** Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons. *Comptes Rendus Physique*. 2003; 4(1):145–161.
20. **Hasegawa A., Nyu T.** Eigenvalue communication. *Journal of Lightwave Technology*. 1993; 11(3):395–399.
21. **Hari S., Yousefi M.I., Kschischang F.R.** Multieigenvalue communication. *Journal of Lightwave Technology*. 2016; 34(13):3110–3117.
22. **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** Exponential fourth order schemes for direct Zakharov–Shabat problem. *Optics Express*. 2020; 28(1):20.
23. **Boffetta G., Richard A.** Osborne computation of the direct scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*. 1992; 102(2):252–264.

24. **Vasylchenkova A., Prilepsky J.E., Shepelsky D., Chattopadhyay A.** Direct nonlinear Fourier transform algorithms for the computation of solitonic spectra in focusing nonlinear Schrödinger equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019; (68):347–371.
25. **Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.** Numerical algorithm with fourth-order accuracy for the direct Zakharov–Shabat problem. *Optics Letters*. 2019; 44(9):2264.
26. **Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M.** Fast sixth-order algorithm based on the generalized Cayley transform for the Zakharov–Shabat system associated with nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*. 2022; (448):110764.
27. **Blanes S., Casas F., Thalhammer M.** High-order commutatorfree quasi-Magnus exponential integrators for non-autonomous linear evolution equations. *Computer Physics Communications*. 2017; (220):243–262.
28. **Chimmalgi S., Prins P.J., Wahls S.** Fast nonlinear Fourier transform algorithms using higher order exponential integrators. *IEEE Access*. 2019; (7):145161–145176.
29. **Chimmalgi S., Prins P.J., Wahls S.** Fast nonlinear Fourier transform algorithms using higher order exponential integrators. *arXiv Preprint*. 2018; arXiv:1812.00703.
30. **Wahls S., Vincent Poor H.** Fast numerical nonlinear Fourier transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2015; 61(12):6957–6974.
31. **Vaibhav V.** Fast inverse nonlinear Fourier transformation using exponential one-step methods: Darboux transformation. *Physical Review E*. 2017; 96(6):063302.
32. **Delitsyn A.L.** Fast algorithms for solving the inverse scattering problem for the Zakharov–Shabat system of equations and their applications. *Mathematical Notes*. 2022; 112(2):199–214. DOI:10.1134/S0001434622070240.
33. **Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M.** Conservative multiexponential scheme for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem. *Optics Letters*. 2020; 45(7):2082–2085.
34. **Suzuki M.** General nonsymmetric higher-order decomposition of exponential operators and symplectic integrators. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1992; 61(9):3015–3019.
35. **Delves L.M., Lyness J.N.** A numerical method for locating the zeros of an analytic function. *Mathematics of Computation*. 1967; 21(100):543–543.
36. **Vasylchenkova A., Prilepsky Ja.E., Turitsyn S.K.** Contour integrals for numerical computation of discrete eigenvalues in the Zakharov–Shabat problem. *Optics Letters*. 2018; 43(15):3690.
37. **Chekhovskoy I.S., Medvedev S.B., Vaseva I.A., Sedov E.V., Fedoruk M.P.** Introducing phase jump tracking — a fast method for eigenvalue evaluation of the direct Zakharov–Shabat problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021; (96):105718.
38. **He J., Jianping L., Qin Y., Lin N., Yu X., He Y., Xu O., Peng D., Xiang M., Zhou G., Fu S.** Adaptive trust-region-based algorithm for the discrete eigenvalue evaluation of the direct nonlinear Fourier transform. *Optics Letters*. 2022; 47(16):4195–4198.
39. **Yousefi M.I., Kschischang F.R.** Information transmission using the nonlinear Fourier transform. Part II: numerical methods. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2014; 60(7):4329–4345.
40. **Vaibhav V.** Efficient nonlinear Fourier transform algorithms of order four on equispaced grid. *IEEE Photonics Technology Letters*. 2019; 31(15):1269–1272.
41. **Prins P.J., Wahls S.** Higher order exponential splittings for the fast nonLinear Fourier transform of the Korteweg–De Vries equation. *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — Proceedings*. 2018; (4):4524–4528.
42. **Wahls S., Vaibhav V.** Fast inverse nonlinear Fourier transforms for continuous spectra of Zakharov–Shabat type. *arXiv Preprint*. 2016; arXiv:1607.01305.
43. **Kamalian-Kopae M., Vasylchenkova A., Shepelsky D., Prilepsky Ja.E., Turitsyn S.K.** Full-spectrum periodic nonlinear Fourier transform optical communication through solving the Riemann–Hilbert problem. *Journal of Lightwave Technology*. 2020; 38(14):3602–3615.
44. **Xiao G., Yashiro K.** An efficient algorithm for solving Zakharov–Shabat inverse scattering problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2002; 50(6):807–811.
45. **Belai O.V., Podivilov E.V., Schwarz O.Ya., Shapiro D.A., Frumin L.L.** Finite bragg grating synthesis by numerical solution of hermitian Gel’fand–Levitan–Marchenko equations. *JOSA B*. 2006; 23(10):2040–2045.
46. **Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method of the fiber bragg grating synthesis. *JOSA B*. 2007; 24(7):1451–1457.

47. **Frumin L.L., Belai O.V., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem. *JOSA B*. 2015; 32(2):290–296.
48. **Medvedev S., Vaseva I., Fedoruk M.** Block Toeplitz inner-bordering method for the Gelfand–Levitan–Marchenko equations associated with the Zakharov–Shabat system. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2023; 31(2):191–202.
49. **Feced R., Zervas M.N., Muriel M.A.** An efficient inverse scattering algorithm for the design of nonuniform fiber bragg gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 1999; 35(8):1105–1115.
50. **Rosenthal A., Horowitz M.** Inverse scattering algorithm for reconstructing strongly reflecting fiber bragg gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2003; (39):1018–1026.
51. **Ahmad F., Razzaghi M.** A numerical solution to the Gel’fand–Levitan–Marchenko equation. *Applied Mathematics and Computation*. 1998; 89(1–3):31–39.
52. **Yousefi M., Yangzhang X.** Linear and nonlinear frequency-division multiplexing. *IEEE Transaction on Information Theory*. 2020; 66(1):478–495.
53. **Aref V.** Control and detection of discrete spectral amplitudes in nonlinear Fourier spectrum. *arXiv Preprint*. 2016; arXiv:1605.06328.
54. **Aref V., Le S.T., Buelow H.** Modulation over nonlinear Fourier spectrum: continuous and discrete spectrum. *Journal of Lightwave Technology*. 2018; 36(6):1289–1295.
55. **Turitsyn S.K., Prilepsky Ja.E., Le S.T., Wahls S., Frumin L.L., Kamalian M., Derevyanko S.A.** Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives. *Optica*. 2017; 4(3):307–322.